Министерство науки и высшего образования РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Вятский государственный университет»

Институт математики и информационных систем

Факультет автоматики и вычислительной техники

Кафедра электронных вычислительных машин

Исследование многослойного персептрона с обучением по методу с обратным распространением ошибки

Отчёт

### Лабораторная работа № 1 по дисциплине

«Системы обработки знаний»

Выполнила студент группы ИВТб-41\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/Седов М. Д./

## Проверил доцент кафедры ЭВМ\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/Ростовцев В. С./

Киров 2021

**Цель**

Изучить алгоритм обратного распространения ошибки (ОРО) в процессе обучения нейронной сети при вариативных параметрах обучения. Работа выполняется с помощью программы BackPropagate 3.0.0.

**1 Задание**

Обучающая выборка представлена в приложении А. Используется выходная функция out =X1–X2^2–X3. Переменные x1 измеряется в промежутке [-4;4] с шагом 0,1, переменная x2 изменяется в промежутке [-6;6] с шагом 0,1, x3 - [1;5].

**2 Протокол выполнения**

Во всех таблицах ниже цветом выделен наилучший результат. Значение минимальной ошибки не учитывалось при выборе.

**2.1 Влияние нормализации на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3.

Число выходов: 1.

Циклов обучения: 1000

В таблице 1 показаны результаты исследования.

Таблица 1 – Влияние нормализации на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Тип нормализации | Результат |
| Без нормализации | Максимальная ошибка: 41,01  Минимальная ошибка: 0  Средняя ошибка: 24,6601  Среднеквадратичная ошибка: 53811,9493 |
| [0;1] | Максимальная ошибка: 22,973084  Минимальная ошибка: 0,283357  Средняя ошибка: 10,695654459854  Среднеквадратичная ошибка: 9457,60845399253 |
| [-0.5;0.5] | Максимальная ошибка: 24,699215  Минимальная ошибка: 2,395598  Средняя ошибка: 12,3325194817518  Среднеквадратичная ошибка: 12133,2649603782 |
| [-1;1] | Максимальная ошибка: 41,009991  Минимальная ошибка: 0  Средняя ошибка: 24,6601454  Среднеквадратичная ошибка: 53811,9483094731 |

Применение нормализации [0;1] значительно сокращает величину ошибок.

**2.2 Влияние выбора примеров на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3.

Число выходов: 1.

Циклов обучения: 1000.

Нормализация: [0;1].

В таблице 2 показаны результаты исследования.

Таблица 2 – Влияние выбора примеров на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Выбор примеров | Результат |
| Последовательный | Максимальная ошибка: 23,844323  Минимальная ошибка: 1,578702  Средняя ошибка: 11,395781379562  Среднеквадратичная ошибка: 10551,14052336443 |
| Случайный | Максимальная ошибка: 22,973084  Минимальная ошибка: 0,283357  Средняя ошибка: 10,695654459854  Среднеквадратичная ошибка: 9457,60845399253 |

Случайный выбор примеров показывает лучший результат по сравнению с последовательным выбором примеров обучения.

**2.3 Влияние крутизны функции на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3.

Число выходов: 1.

Циклов обучения: 1000.

Нормализация: [0;1].

Выбор примеров: случайный.

В таблице 3 показаны результаты исследования.

Таблица 3 – Влияние крутизны функции на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Крутизна функции | Результат |
| 0,1 | Максимальная ошибка: 24,658934  Минимальная ошибка: 2,346057  Средняя ошибка: 12,3473078686131  Среднеквадратичная ошибка: 12158,0145082307 |
| 0,5 | Максимальная ошибка: 22,973084  Минимальная ошибка: 0,283357  Средняя ошибка: 10,695654459854  Среднеквадратичная ошибка: 9457,60845399253 |
| 1,0 | Максимальная ошибка: 17,447951  Минимальная ошибка: 0,02191999999  Средняя ошибка: 4,3755617810219  Среднеквадратичная ошибка: 2116,10844434154 |
| 3,0 | Максимальная ошибка: 18,083525  Минимальная ошибка: 0,008578  Средняя ошибка: 4,40751371532847  Среднеквадратичная ошибка: 2380,44954314138 |

Наилучшие результаты – при крутизне функции 1,0.

**2.4 Влияние смещения на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3.

Число выходов: 1.

Циклов обучения: 1000.

Нормализация: [0;1].

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 1.

В таблице 4 показаны результаты исследования.

Таблица 4 – Влияние смещения на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Смещение | Результат |
| 0,1 | Максимальная ошибка: 17,03812  Минимальная ошибка: 0,030581  Средняя ошибка: 5,0331838759  Среднеквадратичная ошибка: 2972,56755363546 |
| 0,5 | Максимальная ошибка: 17,515156  Минимальная ошибка: 0,021265999999  Средняя ошибка: 4,6555025912  Среднеквадратичная ошибка: 2570,09050288 |
| 1,0 | Максимальная ошибка: 17,447951  Минимальная ошибка: 0,02191999999  Средняя ошибка: 4,3755617810219  Среднеквадратичная ошибка: 2116,10844434154 |
| 2,0 | Максимальная ошибка: 17,860393  Минимальная ошибка: 0,02604099999  Средняя ошибка: 5,03921960583  Среднеквадратичная ошибка: 2578,47202008895 |

Наилучшие результаты наблюдаются при смещении 1,0. Наименьшая максимальная ошибка наблюдаются при смещении 0,1, а наименьшие минимальная, средняя и среднеквадратическая ошибка – при смещении 1,0.

**2.5 Влияние скорости обучения на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3.

Число выходов: 1.

Циклов обучения: 1000.

Нормализация: [0;1].

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 1.

Смещение: 1.

В таблице 5 показаны результаты исследования.

Таблица 5 – Влияние скорости обучения на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Скорость обучения | Результат |
| 0,01 | Максимальная ошибка: 23,889278  Минимальная ошибка: 2,165691  Средняя ошибка: 11,59712904  Среднеквадратичная ошибка: 10733,392310847 |
| 0,1 | Максимальная ошибка: 17,447951  Минимальная ошибка: 0,02191999999  Средняя ошибка: 4,3755617810219  Среднеквадратичная ошибка: 2116,10844434154 |
| 0,5 | Максимальная ошибка: 18,811113  Минимальная ошибка: 0,203837  Средняя ошибка: 5,30231670802  Среднеквадратичная ошибка: 2756,81088118633 |
| 1,0 | Максимальная ошибка: 16,189081  Минимальная ошибка: 0,148908  Средняя ошибка: 5,3890004598  Среднеквадратичная ошибка: 2646,28935286 |

Увеличение скорости обучения во всех случаях ведет к снижению средней и среднеквадратичной ошибки. Наилучшие результаты наблюдаются при скорости 1,0.

**2.6 Влияние количества нейронов в скрытом слое на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3.

Число выходов: 1.

Циклов обучения: 1000.

Нормализация: [0;1].

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 1.

Смещение: 1.

Скорость обучения: 1.

В таблице 6 показаны результаты исследования.

Таблица 6 – Влияние количества нейронов в скрытом слое на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Количество нейронов в скрытом слое | Результат |
| 1 | Максимальная ошибка: 22,028578  Минимальная ошибка: 0,02193  Средняя ошибка: 6,3331904  Среднеквадратичная ошибка: 3951,444869943 |
| 5 | Максимальная ошибка: 16,189081  Минимальная ошибка: 0,148908  Средняя ошибка: 5,3890004598  Среднеквадратичная ошибка: 2646,28935286 |
| 10 | Максимальная ошибка: 17,310105  Минимальная ошибка: 0,02306  Средняя ошибка: 5,55307477372263  Среднеквадратичная ошибка: 2813,42070818367 |

Приоритет был отдан количеству нейронов в скрытом слое, равному 5.

**2.7 Влияние момента на эффективность алгоритма ОРО**

Число входов: 3.

Число выходов: 1.

Циклов обучения: 1000.

Нормализация: [0;1].

Выбор примеров: случайный.

Крутизна функции: 1.

Смещение: 1.

Скорость обучения: 1.

Количество нейронов в скрытом слое: 5.

В таблице 7 показаны результаты исследования.

Таблица 7 – Влияние момента на эффективность алгоритма ОРО

|  |  |
| --- | --- |
| Момент | Результат |
| Без момента | Максимальная ошибка: 16,189081  Минимальная ошибка: 0,148908  Средняя ошибка: 5,3890004598  Среднеквадратичная ошибка: 2646,28935286 |
| 0,1 | Максимальная ошибка: 17,091992  Минимальная ошибка: 0,16309  Средняя ошибка: 4,64099294693  Среднеквадратичная ошибка: 2353,293484 |
| 0,5 | Максимальная ошибка: 46,99824  Минимальная ошибка: 5,988492  Средняя ошибка: 22,1473975401  Среднеквадратичная ошибка: 45280,0604049 |
| 1,0 | Максимальная ошибка: 41,099726  Минимальная ошибка: 0,00044  Средняя ошибка: 24,8340739  Среднеквадратичная ошибка: 53982,802417522 |

Наилучшие результаты наблюдаются при обучении без момента и обучении с моментом 0,1. Наименьшие максимальная ошибка наблюдаются при обучении без момента, а наименьшие средняя и среднеквадратическая ошибка – при обучении с моментом 0,1.

**3 Ручной расчет**

Для более подробного изучения алгоритма ОРО в режиме трассировки был сделан один проход (включающий прямое и обратное распространение), а затем те же самые действия были произведены вручную.

На рисунке 1 показана трассировка первого прохода при обучении сети.

На рисунке 2 показана структура сети.

|  |
| --- |
| Инициализация весов синапсов случайным образом...  Нейрон[1][1]  w[1, 1, 1] = 0,696  w[1, 1, 2] = -0,524  w[1, 1, 3] = 0,542  Вес смещения:  w[1, 1, 4] = 1  Нейрон[1][2]  w[1, 2, 1] = 0,406  w[1, 2, 2] = 0,194  w[1, 2, 3] = -0,998  Вес смещения:  w[1, 2, 4] = 1  Нейрон[1][3]  w[1, 3, 1] = -0,286  w[1, 3, 2] = -0,412  w[1, 3, 3] = -0,426  Вес смещения:  w[1, 3, 4] = 1  Нейрон[1][4]  w[1, 4, 1] = 0,492  w[1, 4, 2] = 0,708  w[1, 4, 3] = -0,54  Вес смещения:  w[1, 4, 4] = 1  Нейрон[1][5]  w[1, 5, 1] = -0,484  w[1, 5, 2] = 0,872  w[1, 5, 3] = -0,98  Вес смещения:  w[1, 5, 4] = 1  Нейрон[2][1]  w[2, 1, 1] = -0,356  w[2, 1, 2] = -0,388  w[2, 1, 3] = -0,188  w[2, 1, 4] = 0,416  w[2, 1, 5] = 0,972  Вес смещения:  w[2, 1, 6] = 1  Выбираем допустимый образ из обучающего множества...  0,953191  0,870213  0,97234  0,852979  Подаем сигнал на вход нейронной сети...  Нейрон[0][1]  Аксон = 0,953191  Нейрон[0][2]  Аксон = 0,870213  Нейрон[0][3]  Аксон = 0,97234  Прямая волна...  Нейрон[1][1]  Взвешенная сумма = 1,734437604  Аксон = 0,8499791588  Нейрон[1][2]  Взвешенная сумма = 0,585421548  Аксон = 0,642313948  Нейрон[1][3]  Взвешенная сумма = -0,045357222  Аксон = 0,4886626381  Нейрон[1][4]  Взвешенная сумма = 1,560017176  Аксон = 0,8263558176  Нейрон[1][5]  Взвешенная сумма = 0,344588092  Аксон = 0,585304593  Нейрон[2][1]  Взвешенная сумма = 1,269001116  Аксон = 0,6535092485  Обратная волна - подсчет локальной ошибки нейронов...  Подсчет локальной ошибки нейронов на выходе нейронной сети...  Желаемый сигнал на выходе:  0,852979  Прогнозируемый сигнал на выходе нейронной сети:  0,6535092485  Нейрон[2][1]  Локальная ошибка = -0,02258345768  Подсчет локальной ошибки нейронов в скрытых слоях нейронной сети...  Нейрон[1][1]  Локальная ошибка = 0,001025180431  Нейрон[1][2]  Локальная ошибка = 0,002013128604  Нейрон[1][3]  Локальная ошибка = 0,001060876788  Нейрон[1][4]  Локальная ошибка = -0,001348065807  Нейрон[1][5]  Локальная ошибка = -0,005328044684  Коррекция весов синапсов...  w[1, 1, 1] = 0,6970251804  w[1, 1, 2] = -0,5229748196  w[1, 1, 3] = 0,5430251804  Вес смещения:  w[1, 1, 4] = 1,00102518  w[1, 2, 1] = 0,4080131286  w[1, 2, 2] = 0,1960131286  w[1, 2, 3] = -0,9959868714  Вес смещения:  w[1, 2, 4] = 1,002013129  w[1, 3, 1] = -0,2849391232  w[1, 3, 2] = -0,4109391232  w[1, 3, 3] = -0,4249391232  Вес смещения:  w[1, 3, 4] = 1,001060877  w[1, 4, 1] = 0,4906519342  w[1, 4, 2] = 0,7066519342  w[1, 4, 3] = -0,5413480658  Вес смещения:  w[1, 4, 4] = 0,9986519342  w[1, 5, 1] = -0,4893280447  w[1, 5, 2] = 0,8666719553  w[1, 5, 3] = -0,9853280447  Вес смещения:  w[1, 5, 4] = 0,9946719553  w[2, 1, 1] = -0,3785834577  w[2, 1, 2] = -0,4105834577  w[2, 1, 3] = -0,2105834577  w[2, 1, 4] = 0,3934165423  w[2, 1, 5] = 0,9494165423  Вес смещения:  w[2, 1, 6] = 0,9774165423 |

Рисунок 1 – Трассировка первого прохода

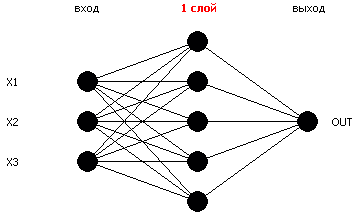


Рисунок 2 – Структура сети

В качестве активационной функции взята

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

где – взвешенная сумма входов i-го нейрона (с учетом смещения);

– коэффициент крутизны. Для скрытого слоя = 1, для выходного = 0,5.

В таблице 8 показан расчет прямой волны.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № слоя | № нейрона | № выхода | Входной сигнал xj | Весовой коэффициент wij | Смещение wi0 | Вес смещения | wij\*xj | Взвешенная сумма Si | Выход нейрона yi = F(Si) |
| Вход | 1 | 1 | 0,953191 | - | - | - | - | - | 0,953191 |
| 2 | 1 | 0,870213 | - | - | - | - | - | 0,870213 |
| 3 | 1 | 0,97234 | - | - | - | - | - | 0,97234 |
| 1 | 1 | 1 | 0,953191 | 0,696 | 0,5 | 1 | 0,663420936 | 1,734437604 | 0,8499791588 |
| 2 | 0,870213 | -0,524 | -0,455991612 |
| 3 | 0,97234 | 0,542 | 0,52700828 |
| 2 | 1 | 0,953191 | 0,406 | 0,5 | 1 | 0,386995546 | 0,585421548 | 0,642313948 |
| 2 | 0,870213 | 0,194 | 0,168821322 |
| 3 | 0,97234 | -0,998 | -0,97039532 |
| 3 | 1 | 0,953191 | -0,286 | 0,5 | 1 | -0,272612626 | -0,045357222 | 0,488662638 |
| 2 | 0,870213 | -0,412 | -0,358527756 |
| 3 | 0,97234 | -0,426 | -0,41421684 |
| 4 | 1 | 0,953191 | 0,492 | 0,5 | 1 | 0,468969972 | 1,560017176 | 0,826355818 |
| 2 | 0,870213 | 0,708 | 0,616110804 |
| 3 | 0,97234 | -0,54 | -0,5250636 |
| 5 | 1 | 0,953191 | -0,484 | 0,5 | 1 | -0,461344444 | 0,344588092 | 0,585304593 |
| 2 | 0,870213 | 0,872 | 0,758825736 |
| 3 | 0,97234 | -0,98 | -0,9528932 |
| Выход | 1 | 1 | 0,8499791588 | -0,356 | 0,5 | 1 | -0,302592581 | 1,269001116 | 0,653509249 |
| 2 | 0,642313948 | -0,388 | -0,249217812 |
| 3 | 0,488662638 | -0,188 | -0,091868576 |
| 4 | 0,826355818 | 0,416 | 0,34376402 |
| 5 | 0,585304593 | 0,972 | 0,568916064 |

Для расчета ошибок необходимо найти производную функции (1) по :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Тогда ошибка единственного нейрона выходного слоя буден найдена как

где – фактическое значение его выхода;

– желаемый сигнал на выходе.

Ошибка i-го нейрона скрытого слоя будет найдена как

где – ошибка выходного слоя;

– синаптическая связь между i-м нейроном скрытого слоя и j-м нейроном выходного слоя.

В таблице 9 показан расчет ошибок.

Таблица 9 – Расчет ошибок

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № слоя | № нейрона | Si | F'(Si) | Ошибка |
| Выход | 1 | 1,269001116 | 0,113217455 | -0,022583458 |
| 1 | 1 | 1,734437604 | 0,127514588 | 0,00102518 |
| 2 | 0,585421548 | 0,22974674 | 0,002013129 |
| 3 | -0,045357222 | 0,249871464 | 0,001060877 |
| 4 | 1,560017176 | 0,14349188 | -0,001348066 |
| 5 | 0,344588092 | 0,242723126 | -0,005328045 |

Коррекция веса синапса производится по следующей формуле:

Коррекция веса смещения производится по следующей формуле:

В таблице 10 показан расчет новых весов.

Значения в таблицах 8,9 полностью совпадают со значениями на рис. 1.

Скорректированные веса в таблице 10 совпадают с искомыми с точностью не менее трех знаков после запятой; погрешность можно объяснить ошибками округления и расчетов с плавающей запятой в разных средах.

Таким образом, ручной расчет выполнен верно.

Таблица 10 – Расчет новых весов.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № слоя | № нейрона | № выхода | Предыдущий весовой коэффициент wij(t) | Предыдущий вес смещения Tj(t) | Новый весовой коэффициент wij(t+1) | Новый вес смещения Tj(t+1) |
| 1 | 1 | 1 | 0,696 | 1 | 0,696111114 | 1,000111114 |
| 2 | -0,524 | -0,523888886 |
| 3 | 0,542 | 0,542111114 |
| 2 | 1 | 0,406 | 1 | 0,405702924 | 1,000297076 |
| 2 | 0,194 | 0,193702924 |
| 3 | -0,998 | -0,998297076 |
| 3 | 1 | -0,286 | 1 | -0,286129536 | 1,000129536 |
| 2 | -0,412 | -0,412129536 |
| 3 | -0,426 | -0,426129536 |
| 4 | 1 | 0,492 | 1 | 0,492159847 | 0,999840153 |
| 2 | 0,708 | 0,708159847 |
| 3 | -0,54 | -0,539840153 |
| 5 | 1 | -0,484 | 1 | -0,483243061 | 0,999243061 |
| 2 | 0,872 | 0,872756939 |
| 3 | -0,98 | -0,979243061 |
| Выход | 1 | 1 | -0,356 | 1 | -0,357791114 | 0,99916454 |
| 2 | -0,388 | -0,389791114 |
| 3 | -0,188 | -0,189791114 |
| 4 | 0,416 | 0,414208886 |
| 5 | 0,972 | 0,970208886 |

**4 Выводы**

В ходе выполнения лабораторной работы был исследован алгоритм ОРО при обучении многослойной НС, а также влияние различных параметров на качество обучения.

Наибольшее влияние на качество обучения показали нормализация, крутизна функции и величина момента. Влияние других параметров были значительно меньше. Случайный выбор примеров улучшил результаты работы, его использование предпочтительно для избегания привыкания сети.

Оптимальные параметры, выбранные для решения данной задачи:

Число входов: 3;

Число выходов: 1;

Циклов обучения: 1000;

Нормализация: [0;1];

Выбор примеров: случайный;

Крутизна функции: 1;

Смещение: 1;

Скорость обучения: 1;

Количество нейронов в скрытом слое: 5.

Работа алгоритма ОРО была проверена ручным расчетом одного прохода. Вычисленные вручную значения примерно совпали с автоматическими. Разница возникла из-за округлений и погрешностей в вычислениях.

Приложение А

(обязательное)

Обучающая выборка

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | x3 | out |
| -4 | -6 | 1 | -41 |
| -3,9 | -6 | 1,1 | -41 |
| -3,8 | -6 | 1,2 | -41 |
| -3,7 | -5,9 | 1,3 | -39,81 |
| -3,6 | -5,8 | 1,4 | -38,64 |
| -3,5 | -5,7 | 1,5 | -37,49 |
| -3,4 | -5,6 | 1,6 | -36,36 |
| -3,3 | -5,5 | 1,7 | -35,25 |
| -3,2 | -5,4 | 1,8 | -34,16 |
| -3,1 | -5,3 | 1,9 | -33,09 |
| -3 | -5,2 | 2 | -32,04 |
| -2,9 | -5,1 | 2,1 | -31,01 |
| -2,8 | -5,1 | 2,2 | -31,01 |
| -2,7 | -5,1 | 2,3 | -31,01 |
| -2,6 | -5,1 | 2,4 | -31,01 |
| -2,5 | -5,1 | 2,5 | -31,01 |
| -2,4 | -5,1 | 2,6 | -31,01 |
| -2,3 | -5,1 | 2,7 | -31,01 |
| -2,2 | -5,1 | 2,8 | -31,01 |
| -2,1 | -5,1 | 2,9 | -31,01 |
| -2 | -5 | 3 | -30 |
| -1,9 | -5 | 3,1 | -30 |
| -1,8 | -5 | 3,2 | -30 |
| -1,7 | -5 | 3,3 | -30 |
| -1,6 | -5 | 3,4 | -30 |
| -1,5 | -5 | 3,5 | -30 |
| -1,4 | -5 | 3,6 | -30 |
| -1,3 | -5 | 3,7 | -30 |
| -1,2 | -4,9 | 3,8 | -29,01 |
| -1,1 | -4,8 | 3,9 | -28,04 |
| -1 | -4,7 | 4 | -27,09 |
| -0,9 | -4,6 | 4,1 | -26,16 |
| -0,8 | -4,5 | 4,2 | -25,25 |
| -0,7 | -4,4 | 4,3 | -24,36 |
| -0,6 | -4,3 | 4,4 | -23,49 |
| -0,5 | -4,2 | 4,5 | -22,64 |
| -0,4 | -4,1 | 4,6 | -21,81 |
| -0,3 | -4 | 4,7 | -21 |
| -0,2 | -3,9 | 4,8 | -20,21 |
| -0,1 | -3,8 | 4,9 | -19,44 |
| 2,41E-15 | -3,7 | 5 | -18,69 |
| 0,1 | -3,6 | 1 | -13,86 |
| 0,2 | -3,5 | 1,1 | -13,15 |
| 0,3 | -3,4 | 1,2 | -12,46 |
| 0,4 | -3,3 | 1,3 | -11,79 |
| 0,5 | -3,2 | 1,4 | -11,14 |
| 0,6 | -3,1 | 1,5 | -10,51 |
| 0,7 | -3 | 1,6 | -9,9 |
| 0,8 | -2,9 | 1,7 | -9,31 |
| 0,9 | -2,8 | 1,8 | -8,74 |
| 1 | -2,7 | 1,9 | -8,19 |
| 1,1 | -2,6 | 2 | -7,66 |
| 1,2 | -2,5 | 2,1 | -7,15 |
| 1,3 | -2,4 | 2,2 | -6,66 |
| 1,4 | -2,3 | 2,3 | -6,19 |
| 1,5 | -2,2 | 2,4 | -5,74 |
| 1,6 | -2,1 | 2,5 | -5,31 |
| 1,7 | -2 | 2,6 | -4,9 |
| 1,8 | -1,9 | 2,7 | -4,51 |
| 1,9 | -1,8 | 2,8 | -4,14 |
| 2 | -1,7 | 2,9 | -3,79 |
| 2,1 | -1,6 | 3 | -3,46 |
| 2,2 | -1,5 | 3,1 | -3,15 |
| 2,3 | -1,4 | 3,2 | -2,86 |
| 2,4 | -1,3 | 3,3 | -2,59 |
| 2,5 | -1,2 | 3,4 | -2,34 |
| 2,6 | -1,1 | 3,5 | -2,11 |
| 2,7 | -1 | 3,6 | -1,9 |
| 2,8 | -0,9 | 3,7 | -1,71 |
| 2,9 | -0,8 | 3,8 | -1,54 |
| 3 | -0,7 | 3,9 | -1,39 |
| 3,1 | -0,7 | 4 | -1,39 |
| 3,2 | -0,7 | 4,1 | -1,39 |
| 3,3 | -0,6 | 4,2 | -1,26 |
| 3,4 | -0,5 | 4,3 | -1,15 |
| 3,5 | -0,4 | 4,4 | -1,06 |
| 3,6 | -0,3 | 4,5 | -0,99 |
| 3,7 | -0,2 | 4,6 | -0,94 |
| 3,8 | -0,1 | 4,7 | -0,91 |
| 3,9 | 0 | 4,8 | -0,9 |
| 4 | 0,1 | 4,9 | -0,91 |
| 1 | 0,2 | 5 | -4,04 |
| 1,1 | 0,3 | 1 | 0,01 |
| 1,2 | 0,4 | 1,1 | -0,06 |
| 1,3 | 0,5 | 1,2 | -0,15 |
| 1,4 | 0,6 | 1,3 | -0,26 |
| 1,5 | 0,7 | 1,4 | -0,39 |
| 1,6 | 0,8 | 1,5 | -0,54 |
| 1,7 | 0,9 | 1,6 | -0,71 |
| 1,8 | 1 | 1,7 | -0,9 |
| 1,9 | 1,1 | 1,8 | -1,11 |
| 2 | 1,2 | 1,9 | -1,34 |
| 2,1 | 1,3 | 2 | -1,59 |
| 2,2 | 1,4 | 2,1 | -1,86 |
| 2,3 | 1,5 | 2,2 | -2,15 |
| 2,4 | 1,6 | 2,3 | -2,46 |
| 2,5 | 1,7 | 2,4 | -2,79 |
| 2,6 | 1,8 | 2,5 | -3,14 |
| 2,7 | 1,9 | 2,6 | -3,51 |
| 2,8 | 2 | 2,7 | -3,9 |
| 2,9 | 2,1 | 2,8 | -4,31 |
| 3 | 2,2 | 2,9 | -4,74 |
| 3,1 | 2,3 | 3 | -5,19 |
| 3,2 | 2,4 | 3,1 | -5,66 |
| 3,3 | 2,5 | 3,2 | -6,15 |
| 3,4 | 2,6 | 3,3 | -6,66 |
| 3,5 | 2,7 | 3,4 | -7,19 |
| 3,6 | 2,8 | 3,5 | -7,74 |
| 3,7 | 2,9 | 3,6 | -8,31 |
| 3,8 | 3 | 3,7 | -8,9 |
| 3,9 | 3,1 | 3,8 | -9,51 |
| 4 | 3,2 | 3,9 | -10,14 |
| -4 | 3,3 | 4 | -18,89 |
| -3,9 | 3,4 | 4,1 | -19,56 |
| -3,8 | 3,5 | 4,2 | -20,25 |
| -3,7 | 3,6 | 4,3 | -20,96 |
| -3,6 | 3,7 | 4,4 | -21,69 |
| -3,5 | 3,8 | 4,5 | -22,44 |
| -3,4 | 3,9 | 4,6 | -23,21 |
| -3,3 | 4 | 4,7 | -24 |
| -3,2 | 4,1 | 4,8 | -24,81 |
| -3,1 | 4,2 | 4,9 | -25,64 |
| -3 | 4,3 | 5 | -26,49 |
| -2,9 | 4,4 | 1 | -23,26 |
| -2,8 | 4,5 | 1,1 | -24,15 |
| -2,7 | 4,6 | 1,2 | -25,06 |
| -2,6 | 4,7 | 1,3 | -25,99 |
| -2,5 | 4,8 | 1,4 | -26,94 |
| -2,4 | 4,9 | 1,5 | -27,91 |
| -2,3 | 5 | 1,6 | -28,9 |
| -2,2 | 5,1 | 1,7 | -29,91 |
| -2,1 | 5,2 | 1,8 | -30,94 |
| -2 | 5,3 | 1,9 | -31,99 |
| -1,9 | 5,4 | 2 | -33,06 |
| -1,8 | 5,5 | 2,1 | -34,15 |
| -1,7 | 5,6 | 2,2 | -35,26 |
| -1,6 | 5,7 | 2,3 | -36,39 |
| -1,5 | 5,8 | 2,4 | -37,54 |
| -1,4 | 5,9 | 2,5 | -38,71 |
| -1,3 | 6 | 2,6 | -39,9 |